

ASTUCE DE SALBERGER ET ZÉRO-CYCLES SUR CERTAINES FIBRATIONS

YONGQI LIANG

RÉSUMÉ. On démontre que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus d'une courbe lisse ou au-dessus de l'espace projectif. L'exactitude d'une suite de type global-local pour les groupes de Chow des zéro-cycles est aussi établie pour ces variétés. La nouveauté principale est que les hypothèses arithmétiques sont supposées seulement sur les fibres au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien généralisé, de plus, on permet l'existence des fibres géométriquement non intègres.

ABSTRACT. We prove that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle and to weak approximation for zero-cycles on certain fibrations over a smooth curve or over the projective space. The exactness of a sequence of global-local type for Chow groups of zero-cycles is also established for these varieties. The principal novelty is that the arithmetic hypotheses are supposed only on the fibers over a generalized Hilbertian subset, moreover, we permit the existence of geometrically non integral fibers.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Conventions et rappels	3
2. Cas particulier où les fibres sont géométriquement intègres et $B = \mathbb{P}^1$	5
3. Cas particulier où (ABÉLIENNE-SCINDÉE) est vérifiée et $B = \mathbb{P}^1$	9
4. Cas général	14
4.1. Fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque	14
4.2. Fibrations au-dessus de \mathbb{P}^n	15
5. La suite exacte (E)	15
5.1. Le cas $B = C$	16
5.2. Le cas $B = \mathbb{P}^n$	17
6. Fibré en surfaces de Châtelet	18
Références	19

INTRODUCTION

Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombre k . On considère le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X . On considère également, en un certain sens (précisé dans §1), l'approximation faible/forte pour les zéro-cycles de degré 1 sur X . L'obstruction associée au groupe

Date: 18 janvier 2013.

Mots clés : zéro-cycle de degré 1, principe de Hasse, approximation faible, obstruction de Brauer-Manin.

Classification AMS : 14G25 (11G35, 14D10).

de Brauer $Br(X)$, dite de Brauer-Manin, est introduite par Manin dans son exposé [18] pour les points rationnels sur X , et est étendue aux zéro-cycles par Colliot-Thélène dans [1]. Il a été conjecturé par Colliot-Thélène/Sansuc [5], Kato/Saito [14], et Colliot-Thélène [1], que la suite suivante (cf. §5) soit exacte

$$(E) \ CH_0(X) \rightarrow CH_{0,\mathbb{A}}(X) \rightarrow Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

qui signifie qu'une famille de zéro-cycles locaux orthogonale au groupe de Brauer $Br(X)$ de X provient (modulo un entier donné) d'un zéro-cycle global.

Supposons toujours que X admet un morphisme dominant $\pi : X \rightarrow B$ à fibre générique X_η géométriquement intègre sur le corps des fonctions $k(B)$, où B est une variété projective lisse et géométriquement intègre. Soit H un sous-ensemble (à préciser ci-dessous) de points fermés de B . On fait les hypothèses suivantes :

(HP/AF) le principe de Hasse/l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) vaut pour la $k(\theta)$ -variété X_θ pour tout point fermé $\theta \in H \subset B$;

(ABÉLIENNE-SCINDÉE) pour tout point θ de B de codimension 1, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

L'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE), introduite par Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [7], est automatiquement vérifiée si toutes les fibres de π sont géométriquement intègres.

En utilisant l'astuce de Salberger ([21], §6), dans leur article [7], Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer montrent que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X si $B = \mathbb{P}^1$ et si H est un ouvert dense de B . Ce résultat a été généralisé (au moins partiellement) dans deux directions différentes : en généralisant la base B et en affaiblissant l'hypothèse sur le sous-ensemble H .

- Initié par Colliot-Thélène [2], suivi par les travaux de Frossard [10] et de van Hamel [24], on arrive au résultat récent de Wittenberg [27], il montre la même assertion pour le cas où $B = C$ est une courbe lisse de genre quelconque en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich $\text{III}(Jac(C))$ de sa jacobienne, avec H un ouvert dense de C ; de plus, il montre l'exactitude de (E) lorsque X_η est géométriquement rationnellement connexe. Un énoncé similaire pour le cas où $B = \mathbb{P}^n$ avec H un ouvert dense est montré par l'auteur dans [16], Théorème 3.5.

- Dans l'autre direction, afin d'appliquer le résultat aux solides de Poonen construits dans [20], l'auteur montre dans [17] que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur X , si l'on suppose que toutes les fibres de π sont géométriquement intègres, si $B = C$ est une courbe lisse de groupe $\text{III}(Jac(C))$ fini, et si H est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* (cf. §1, en particulier un ouvert dense est un tel sous-ensemble) de C .

Le but de ce travail est de montrer le théorème principal suivant qui généralise simultanément les résultats des deux types ci-dessus.

Théorème principal. *Soit $\pi : X \rightarrow B$ un morphisme dominant entre des variétés projectives lisses et géométriquement intègres, à fibre générique X_η géométriquement intègre sur $k(B)$. On suppose*

(ABÉLIENNE-SCINDÉE)

pour tout point θ de B de codimension 1, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de B . Supposons respectivement que

- (1) pour tout point fermé $\theta \in \text{Hil}$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) ;*
- (2) pour tout point fermé $\theta \in \text{Hil}$, la fibre X_θ satisfait l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) ;*
- (3) l'hypothèse (2) et de plus la fibre générique X_η est géométriquement rationnellement connexe.*

Alors, dans chacun des cas suivants

- la base $B = C$ est une courbe de groupe de Tate-Shafarevich $\text{III}(\text{Jac}(C))$ fini,*
- la base $B = \mathbb{P}^n$ est l'espace projectif,*

on a pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

- (1) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse ;*
- (2) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible ;*
- (3) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte, et de plus, la suite (E) est exacte.*

En comparant avec les résultats [27, Théorèmes 1.3, 1.4] et [17, Théorème 3.1], dans ce travail l'hypothèse arithmétique est supposée au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien généralisé au lieu d'un ouvert dense, plus de fibres qui ne satisfont pas le principe de Hasse ou l'approximation faible sont permises, d'où on trouve une nouvelle application dans §6. Ces deux anciens résultats sont basés sur le résultat de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [7, Théorème 4.1], là l'astuce de Salberger a été utilisée pour sa démonstration. Dans ce article, on développe cette astuce afin de démontrer le théorème ci-dessus pour le cas crucial où $B = \mathbb{P}^1$.

On montre d'abord dans §2 le cas particulier du théorème, hormis l'exactitude de (E) , où $B = \mathbb{P}^1$ sous l'hypothèse plus forte que (ABÉLIENNE-SCINDÉE) :

- toutes les fibres de π sont géométriquement intègres.

Ensuite, dans §3, on adapte cette preuve à l'astuce de Salberger et on montre le théorème pour le cas où $B = \mathbb{P}^1$ sous l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE). C'est une généralisation de [7, Théorème 4.1]. À partir de ceci, en appliquant les méthodes de Wittenberg [27, 28] (voir aussi [16]), on traite le cas où $B = C$ est une courbe dans §4.1 §5.1 et le cas où $B = \mathbb{P}^n$ dans §4.2 §5.2. Enfin, on discute l'application aux fibrations en surfaces de Châtelet dans §6.

1. CONVENTIONS ET RAPPELS

Conventions. Dans tout ce travail, une *variété* désigne un schéma séparé de type fini sur un corps. Une *fibration* $\pi : X \rightarrow B$ signifie un morphisme dominant entre des variétés lisses et géométriquement intègres à fibre générique géométriquement intègre. Le corps de base k est toujours un corps de nombres. Comme d'habitude, on note Ω_k (resp. Ω_k^f , Ω_k^∞) l'ensemble des places (resp. places finies, places archimédiennes) de k . Pour chaque place $v \in \Omega_k$, on note k_v le corps local associé, et $\bar{k}(v)$ le corps résiduel si v est non-archimédienne. On fixe une clôture algébrique \bar{k} de k , \bar{k}_v de k_v pour toute $v \in \Omega_k$. L'expression « presque tout » signifie toujours « tout à l'exception d'un nombre fini ». Soit k' une extension finie de k ,

pour un sous-ensemble S de places de k , on note $S \otimes_k k'$ l'ensemble des places de k' au-dessus des places dans S .

Accouplement de Brauer-Manin. Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps k , le composé de la restriction et l'application d'évaluation définit un accouplement

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : Z_0(X) \times Br(X) &\rightarrow Br(k), \\ \left(\sum_P n_P P, b \right) &\mapsto \sum_P n_P \text{cores}_{k(P)/k}(b(P)), \end{aligned}$$

qui se factorise à travers l'équivalence rationnelle \sim , où $Br(\cdot) = H_{\text{ét}}^2(\cdot, \mathbb{G}_m)$ est le groupe de Brauer cohomologique. Lorsque k est un corps de nombres, on définit l'accouplement de Brauer-Manin pour les zéro-cycles :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : \prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v) \times Br(X) &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ \left(\{z_v\}_{v \in \Omega_k}, b \right) &\mapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\langle z_v, b \rangle_{k_v}), \end{aligned}$$

où $\text{inv}_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local en v et où $X_v = X \times_k k_v$.

Principe de Hasse et l'approximation faible/forte. On considère le principe local-global pour les zéro-cycles de degré 1. On dit que X *satisfait le principe de Hasse* (resp. *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour X*) s'il existe un zéro-cycle global de degré 1 lorsqu'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 (resp. une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $Br(X)$). On dit que X *satisfait l'approximation faible (resp. forte) au niveau du groupe de Chow*, si pour tout entier strictement positif m , pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$ (resp. pour $S = \Omega_k$), et pour toute famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de zéro-cycles locaux de degré 1, il existe un zéro-cycle global $z = z_{m,S}$ de degré 1 tel que z et z_v aient la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$. On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow*, si l'on demande de plus $\{z_v\}_{v \in \Omega_k} \perp Br(X)$ dans la définition précédente. Pour simplifier la terminologie, pour les zéro-cycles on dit simplement « *l'approximation faible/forte* » au lieu de « *l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow* ».

Sous-ensemble hilbertien généralisé. On rappelle la notion de *sous-ensemble hilbertien généralisé*. Soit X une variété sur un corps k , un sous-ensemble $\text{Hil} \subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec U un ouvert non-vide de X et Z intègre tel que Hil soit l'ensemble des points fermés θ de U pour lesquels $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe. Si X est une variété normale, soit Hil_i ($i = 1, 2$) un sous-ensemble hilbertien généralisé, on peut trouver un sous-ensemble hilbertien généralisé $\text{Hil} \subset \text{Hil}_1 \cap \text{Hil}_2$, cf. [17], §1.2.

Zéro-cycles. Soit $z = \sum n_i P_i$ un zéro-cycle de X (avec les points fermés P_i distincts). On dit qu'il est *séparable* si $n_i \in \{0, 1, -1\}$ pour tout i .

Soit $\pi : X \rightarrow B$ un morphisme dominant, le zéro-cycle $z = \sum n_i P_i$ est dit *déployé* (relativement à la fibration $\pi : X \rightarrow B$) s'il existe un $k(P_i)$ -point rationnel sur la fibre X_{P_i} pour tout i .

Étant donné P un point fermé de X_v , on fixe un k_v -plongement $k_v(P) \rightarrow \bar{k}_v$, P est vu comme un point $k_v(P)$ -rationnel de X_v . On dit qu'un point fermé Q de X_v est *suffisamment proche* de P (par rapport à un voisinage U_P de P dans l'espace topologique $X_v(k_v(P))$), si Q a corps résiduel $k_v(Q) = k_v(P)$ et si l'on peut choisir un k_v -plongement $k_v(Q) \rightarrow \bar{k}_v$ tel que Q , vu comme un $k_v(Q)$ -point rationnel de X_v , soit contenu dans U_P . En étendant \mathbb{Z} -linéairement, cela a un sens

de dire que $z'_v \in Z_0(X_v)$ est suffisamment proche de $z_v \in Z_0(X_v)$ (par rapport à un système de voisinages des points qui apparaissent dans le support de z_v), en particulier $\deg(z'_v) = \deg(z_v)$ si c'est le cas. Wittenberg a montré le lemme suivant (en remarquant que si z_v et z'_v sont effectifs de degré d et suffisamment proches, ils définissent des k_v -points sur le produit symétrique $\text{Sym}^d(X)$, suffisamment proches par rapport à la k_v -topologie).

Lemme 1.1 (Wittenberg [27], Lemme 1.8). *Soient m un entier strictement positif et X une variété lisse sur k . Pour $v \in \Omega_k$, soient z_v et z'_v des zéro-cycles de X_v . Alors ils ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ lorsqu'ils sont suffisamment proches.*

Groupe de Brauer vertical. Soit $\pi : X \rightarrow B$ un morphisme dominant entre des variétés lisses connexes. Le groupe de Brauer $Br(X)$ est vu comme un sous-groupe de $Br(k(X))$. La partie verticale $Br_{vert}(X) \subset Br(X)$ consiste en les éléments de $Br(X)$ provenant de $Br(k(B))$ par le morphisme $\pi^* : Br(k(B)) \rightarrow Br(k(X))$ induit par π . Le quotient $Br_{vert}(X)/\pi^*Br(B)$ est fini si B est une courbe et si l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE) dans l'introduction est vérifiée, cf. [6], Lemme 3.1.

2. CAS PARTICULIER OÙ LES FIBRES SONT GÉOMÉTRIQUEMENT INTÈGRES ET $B = \mathbb{P}^1$

Puisque la preuve complète du théorème principal avec $B = \mathbb{P}^1$ est longue, pour le confort du lecteur, on la sépare en deux parties. La première partie §2 se concentre sur les problèmes que comment assurer que θ est un point fermé au lieu d'un zéro-cycle effectif et comment contrôler θ tel que il soit contenu dans Hil. La deuxième partie §3 se concentre sur le traitement de (ABÉLIENNE-SCINDÉE), *i.e.* l'astuce de Salberger, et sur comment l'adapter avec la première partie. La deuxième partie peut être vue comme une interprétation géométrique de l'astuce de Salberger (comparer avec la preuve du théorème 3.1 de [7]).

Dans cette section, on montre un cas particulier du théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) où $B = \mathbb{P}^1$ et on suppose que toutes les fibres sont géométriquement intègres au lieu de l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE), les conclusions qu'on va montrer deviennent beaucoup plus simples, respectivement :

- (1) le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1;
- (2) l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1;
- (3) l'approximation forte pour les zéro-cycles de degré 1.

Ce cas est aussi un cas particulier du théorème principal de l'auteur [17], la preuve présentée ici est plus compliquée que [17], mais l'avantage est qu'on peut adapter cette preuve à l'astuce de Salberger pour montrer une généralisation dans §3. Cette preuve fait une partie essentielle de la preuve entière du théorème principal.

Premièrement, on admet la proposition suivante et montre le cas particulier considéré, ensuite, on montre la proposition.

Proposition 2.1. *Soient $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration à fibres géométriquement intègres et D un sous-ensemble fini de points fermés de \mathbb{P}^1 . Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de \mathbb{P}^1 . Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de zéro-cycles locaux de X de degré 1.*

Alors, pour tout entier strictement positif a et pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, il existe les données suivantes :

(a) pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $z_v^2 \in Z_0(X_v)$ tel que $z_v - z_v^2$ soit a -divisible dans $Z_0(X_v)$; et pour tout tel z_v^2 , un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de D , et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2 ;

(b) un point fermé $\theta \in \text{Hil}$ de degré $d \equiv 1 \pmod{a}$ tel que θ soit déployé localement partout, tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, a fortiori θ et $\pi_*(z_v)$ sont rationnellement équivalents modulo a , i.e. ils ont la même image dans $CH_0(\mathbb{P}_v^1)/a$ pour toute $v \in \Omega_k$.

Démonstration du théorème principal sous les hypothèses au début de §2. On part d'une famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de zéro-cycles de degré 1 sur X , la proposition 2.1 donne un point fermé $\theta \in \text{Hil}$ qui satisfait (a) et (b) de la proposition. Si X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1), il existe un zéro-cycle global z_θ de degré 1 sur la $k(\theta)$ -variété X_θ , c'est un zéro-cycle de degré $d \equiv 1 \pmod{a}$ sur X . Si l'on prend pour a le degré d_Q d'un certain point fermé Q de X , le zéro-cycle $z = z_\theta - hQ$ est alors de degré 1 sur X pour un certain entier convenable h , ceci montre (1). On fixe un entier strictement positif m et un sous-ensemble fini S de places de k . On suppose que la $k(\theta)$ -variété X_θ satisfait l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1), d'après le théorème des fonctions implicites et le lemme 1.1, on peut choisir le zéro-cycle z_θ ci-dessus tel que z_θ et τ_v ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$. De l'autre côté, grâce au lemme 1.1, la proposition 2.1(a) implique que τ_v et z_v^2 ont la même image dans $CH_0(X_v)/a$. Si l'on prend a un multiple de $d_Q m$, les zéro-cycles z et z_v ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$, ceci montre (2). Puisque X_η est géométriquement rationnellement connexe, d'après le corollaire 2.2 de Wittenberg [27], l'application $CH_0(X_v) \rightarrow CH_0(\mathbb{P}_v^1)$ est injective pour presque toute v . Quitte à augmenter S , on peut supposer l'injectivité pour toute $v \notin S$. Pour une telle v , on a $\theta \sim \pi_*(z_v) + ac_v$ pour un certain $c_v \in Z_0(\mathbb{P}_v^1)$. Si l'on prend $a = a'm$ tel que a' soit un multiple de l'indice de la fibre générique X_η , le zéro-cycle ac_v s'écrit comme $m\pi_*(z_v^0)$ pour un certain $z_v^0 \in Z_0(X_v)$, cf. [27], Lemme 2.4. D'où $z_\theta \sim z_v + mz_v^0$ sur X_v , ceci montre (3). \square

Lemme 2.2. *Soit D un ensemble fini de points fermés de \mathbb{P}_k^1 , où k est un corps local non-archimédien. Alors, pour tout nombre entier strictement positif n , il existe un point fermé de $\mathbb{P}^1 \setminus D$ de degré n .*

Démonstration. Comme k est un corps local non-archimédien, il existe alors un polynôme irréductible de degré n , qui va définir un point fermé de $\text{Spec}(k[T]) = \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ de degré n . Il y a un nombre infini de tels polynômes, par exemple les polynômes d'Eisenstein, on peut donc le choisir tel que le point fermé associé soit en dehors de l'ensemble fini D . \square

Démonstration de la proposition 2.1. L'idée de cette démonstration provient de la preuve du théorème 1.3 d'Ekedahl [9] et de la preuve de la proposition 3.2.1 de Harari [12].

On note $K = k(\mathbb{P}^1)$ et $K_Z = k(Z)$ l'extension finie de K associée au revêtement fini $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ définissant Hil , qui est étale au-dessus d'un ouvert dense $U \subset \mathbb{P}^1$. On prend K' la clôture galoienne de K_Z dans \bar{K} une clôture algébrique de K fixée au début. Soit Z' la courbe intègre normale projective de corps des fonctions K' avec les morphismes finis $Z' \rightarrow Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ associés aux extensions des corps $K \subset K_Z \subset K'$,

on note U' l'image réciproque de U dans Z' . On note k' la fermeture algébrique de k dans K' , l'extension k'/k est finie, on note h son degré.

Lemme 2.3. *Les données ci-dessus satisfont : (quitte à restreindre U et U' si nécessaire)*

- (1) le k -morphisme $U' \rightarrow U$ est étale fini surjectif galoisien,
- (2) U' est une courbe géométriquement intègre au-dessus de k' ,
- (3) le diagramme suivant est commutatif, où $U' \rightarrow U_{k'} = U \times_k k'$ est un k' -morphisme.

$$\begin{array}{ccc} U' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ U & \longleftarrow & U_{k'} = U \times_k k' \end{array}$$

- (4) les fibres de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ au-dessus de U sont lisses et géométriquement intègres.

Démonstration. Comme l'extension k'/k est finie et $\text{car}(k) = 0$, on écrit $k' = k(e)$ avec $e \in k'$. Son image par le k -plongement $\iota : k' \rightarrow K'$ est une fonction rationnelle $\iota(e)$ sur la courbe projective Z' . On note P l'ensemble fini des pôles de $\iota(e)$. Quitte à restreindre U et U' , on peut supposer que $U' \cap P = \emptyset$ et que U' se surjecte sur U par le morphisme $Z' \rightarrow \mathbb{P}^1$. Le morphisme des k -algèbres $k' \rightarrow \mathcal{O}_{Z'}(U') \subset K'$ est alors bien défini, qui donne un k -morphisme $U' \rightarrow \text{Spec}(k')$. On peut supposer de plus que les fibres de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ au-dessus de U sont lisses et géométriquement intègres, et que $U' \rightarrow U$ est étale galoisien (en enlevant l'orbite de P sous l'action de $\text{Gal}(K'/K)$ et les points ramifiés), pour plus de détails sur la théorie de Galois pour une courbe algébrique intègre normale cf. [23], Chapitre 4. La courbe U' est géométriquement intègre sur k' , car k' est algébriquement fermé dans $K' = k'(U')$. Le k' -morphisme canonique $U' \rightarrow U_{k'} = U \times_k k'$ satisfait le diagramme commutatif dans (3). \square

Pour trouver un point fermé $\theta \in \text{Hil} \subset \mathbb{P}^1$, il suffit de trouver θ tel que la fibre de $U' \rightarrow U$ en θ soit connexe.

Quitte à augmenter D , on peut supposer que l'ensemble fini D contient tout point fermé θ de \mathbb{P}^1 dont sa fibre X_θ n'est pas lisse.

On note $G = \text{Gal}(K'/K)$, c'est le groupe de Galois du revêtement fini étale $U' \rightarrow U$, le revêtement fini étale $U' \rightarrow U_{k'}$ est aussi galoisien, de groupe noté par H , qui est un sous-groupe de G . On définit $I \subset \Omega_k$ comme l'ensemble des places de k qui sont totalement décomposées dans (la clôture galoisienne de) k' , c'est un ensemble infini d'après le théorème de Čebotarev.

On étend le k' -revêtement fini étale galoisien $U' \rightarrow U_{k'}$ à un modèle entier $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}$ au-dessus de \mathcal{O}_{k', S'_1} qui reste un revêtement fini étale galoisien de groupe H , où $S'_1 \subset \Omega_{k'}$ est un ensemble fini, cf. le théorème 2.1 de [19] et (8.4.4) de [11]. En augmentant S'_1 si nécessaire, on peut supposer que $S'_1 = S_1 \otimes_k k'$ pour un certain ensemble fini $S_1 \subset \Omega_k$ et qu'il existe un modèle \mathcal{U} de U sur \mathcal{O}_{k, S_1} satisfaisant le diagramme commutatif suivant, dont $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}$ est un \mathcal{O}_{k', S'_1} -morphisme et les autres deux flèches sont des \mathcal{O}_{k, S_1} -morphisms.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & & \\ G \downarrow & \searrow H & \\ \mathcal{U} & \longleftarrow & \mathcal{V} \end{array}$$

L'estimation de Lang-Weil avec le lemme de Hensel donne un sous-ensemble fini S_2 de Ω_k tel que pour tout point fermé θ de \mathbb{P}^1 tel que X_θ soit lisse, on ait $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour toute $w \in (\Omega_k \setminus S_2) \otimes_k k(\theta)$, cf. [17], Lemme 3.3.

En augmentant S si nécessaire, on peut supposer que $S \supset S_1 \cup S_2 \cup \Omega_\infty$. Quitte à remplacer l'entier a par $a[k' : k]$, on peut supposer que a est un multiple de $[k' : k]$.

On fixe un point fermé $z_0 \in Z_0(X)$ de degré d_0 tel que $y_0 = \pi_*(z_0)$ soit séparable et à support en dehors de D . On choisit un k -point noté par ∞ de \mathbb{P}^1 hors de $D \cup \text{supp}(y_0)$. On part d'une famille de zéro-cycles $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$. Pour $v \in S$, on écrit $z_v = z_v^+ - z_v^-$ où z_v^+ et z_v^- sont effectifs à supports disjoints. On pose $z_v^1 = z_v + ad_0 z_v^- = z_v^+ + (ad_0 - 1)z_v^-$ de degré $\equiv 1 \pmod{ad_0}$, mais ils ne sont pas nécessairement de même degré quand $v \in S$ varie. On leur ajoute un multiple convenable de az_0 pour chaque v , et on obtient z_v^2 effectif de même degré assez grand $d \equiv 1 \pmod{ad_0}$. D'après le lemme 1.2 de [16], on bouge z_v^2 un peu et obtient $\tau_v \in Z_0(X_v)$ effectif suffisamment proche de z_v^2 tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support en dehors de $D \cup \{\text{supp}(y_0)\} \cup \{\infty\}$.

On trouve une fonction $f_v \in k_v(\mathbb{P}^1)^*/k_v^*$ telle que $\text{div}_{\mathbb{P}^1_v}(f_v) = \pi_*(\tau_v) - d\infty$, pour toute $v \in S$.

Lemme 2.4. *Soit \mathbf{E} l'ensemble fini des classes de conjugaison du groupe H . Alors, il existe une injection*

$$\gamma : \mathbf{E} \rightarrow ((\Omega_k \setminus S) \cap I) \otimes_k k'$$

qui satisfait les conditions suivantes,

- pour tout $c \in \mathbf{E}$ il existe un point de corps résiduel fini $\bar{x}_c \in \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$ tel que le Frobenius associé $\text{Frob}_{\bar{x}_c}$ soit contenu dans la classe c ;
- les places $v_{c_1}, v_{c_2} \in \Omega_k$ sont distincts si $c_1 \neq c_2 \in \mathbf{E}$, où v_c est la place de k au-dessous de $\gamma(c) \in \Omega_{k'}$ pour $c \in \mathbf{E}$.

De plus, si l'on note $v = v_c$ et $w' = \gamma(c)$, les extensions $k'_{w'}/k_v$ et $k'(w')/k(v)$ sont triviales, donc $\mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$ et $U(k_{v_c}) = U_{k'}(k'_{\gamma(c)})$ pour tout $c \in \mathbf{E}$.

Démonstration. On remarque que $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}$ est un revêtement galoisien de groupe H où la fibre générique U' de $\mathcal{U}' \rightarrow \text{Spec}(O_{k', S'_1})$ est une variété géométriquement intègre au-dessus de k' , le théorème de densité de Čebotarev géométrique ([9], Lemme 1.2) donne l'injection γ vérifiant la première condition. L'infinité de l'ensemble I assure que la deuxième condition peut simultanément être vérifiée. La dernière assertion provient de la construction de I . \square

D'après le lemme de Hensel, pour chaque $c \in \mathbf{E}$, le point \bar{x}_c se relève en un point $x_c \in \mathcal{V}(O_{w'}) \subset U_{k'}(k'_{w'})$ où $O_{w'}$ est l'anneau d'entiers du corps local $k'_{w'}$ avec $w' = \gamma(c)$. D'après le lemme 2.2, on trouve alors un point fermé x'_c de U_{v_c} de degré $d-1$ en dehors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty, x_c\}$. On a $x_c + x'_c \sim d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_c})$ et on obtient une fonction $f_{v_c} \in k_{v_c}(\mathbb{P}^1)^*/k_{v_c}^*$ telle que $\text{div}_{\mathbb{P}^1_{v_c}}(f_{v_c}) = (x_c + x'_c) - d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_c})$ pour tout $c \in \mathbf{E}$.

De même, on prend $v_0 \in \Omega_k \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$ et obtient un point fermé x_{v_0} de $U_{v_0} \subset \mathbb{P}^1_{v_0}$ de degré d en dehors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$ et une fonction $f_{v_0} \in k_{v_0}(\mathbb{P}^1)^*/k_{v_0}^*$ telle que $\text{div}_{\mathbb{P}^1_{v_0}}(f_{v_0}) = x_{v_0} - d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_0})$.

D'après le théorème de Riemann-Roch $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\infty))$ est un espace vectoriel de dimension d . On applique l'approximation faible pour \mathbb{P}^{d-1} , on trouve une fonction $f \in k(\mathbb{P}^1)^*$ qui est suffisamment proche des f_v pour $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$.

On a alors $\text{div}_{\mathbb{P}^1}(f) = \theta - d\infty$ avec θ un zéro-cycle effectif séparable à support en dehors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$, de plus,

- (i) θ est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour $v \in S$,
- (ii) θ est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$,
- (iii) θ est suffisamment proche de x_{v_0} .

Le zéro-cycle θ est en fait un point fermé de $U \subset \mathbb{P}^1$ de degré d par (iii).

Le zéro-cycle θ est déployé localement partout. En fait, pour les places dans $(\Omega_k \setminus S) \otimes_k k(\theta)$ l'assertion suit de l'estimation de Lang-Weil mentionnée précédemment, pour les places dans $S \otimes_k k(\theta)$ l'assertion suit du théorème des fonctions implicites.

Pour conclure, il reste à montrer que la fibre de $U' \rightarrow U$ au point θ est connexe.

On note $L = k(\theta)$, on a alors $[L : k] = d$. Le point fermé θ , vu comme un L -point rationnel, est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$, ceci implique qu'il existe $w \in \Omega_L$ au-dessus de v_c tel que L_w/k_{v_c} soit une extension triviale et l'image de θ par l'application $U(L) \rightarrow U(L_w)$ est suffisamment proche de $x_c \in \mathcal{U}(O_w) \subset U(L_w) = U(k_{v_c})$. Donc θ est un point entier de U (pour le modèle \mathcal{U}) dont la réduction modulo w est exactement $\bar{x}_c \in \mathcal{U}(L(w)) = \mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$, où la deuxième égalité provient du lemme 2.4.

On considère le revêtement (fini étale) $\phi : U_{k'} \rightarrow U$. Le point fermé θ de U donne un zéro-cycle $\phi^*(\theta) = \text{Spec}(L) \times_U U_{k'} \simeq \text{Spec}(L \otimes_k k')$ de $U_{k'}$ de degré d . Comme $d \equiv 1 \pmod{a}$, d est premier à $[k' : k]$, l'algèbre étale $L' = L \otimes_k k'$ reste alors un corps, le zéro-cycle $\theta' = \phi^*(\theta)$ est donc un point fermé de $U_{k'}$ de corps résiduel $k'(\theta') = L'$. En notant $w' = \gamma(c)|_{v_c}$, on rappelle que dans le lemme 2.4 on sait $k'_{w'} = k_{v_c}$, $k'(w') = k(v_c)$, $\mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(w'))$, et $U(k_{v_c}) = U_{k'}(k'_{w'})$. Le point $\theta' \in U_{k'}(L'_\lambda)$ définit en fait un point entier de $U_{k'}$ (pour le modèle \mathcal{V}) de réduction modulo λ exactement $\bar{x}_c \in \mathcal{V}(L'(\lambda)) = \mathcal{V}(k'(w'))$, où $\lambda|_{v_c}$ est une des places de L' au-dessus de $w' = \gamma(c) \in \Omega_{k'}$ et au-dessus de $w \in \Omega_L$ à la fois (λ est alors totalement décomposée au-dessus de v_c). En considérant le revêtement galoisien $U' \rightarrow \mathcal{V}$ du groupe H , comme θ' est un point de réduction \bar{x}_c , la classe de conjugaison dans H de l'automorphisme de Frobenius $\text{Frob}_{\bar{x}_c}$ rencontre l'image de l'application $\text{Gal}(\bar{L}'/L') = \text{Gal}(\overline{k'(\theta')}/k'(\theta')) \rightarrow H$, cette dernière flèche est induite par le point fermé θ' de $U_{k'}$ via le choix d'un relèvement du composé $\text{Spec}(\bar{L}') \rightarrow \theta' = \text{Spec}(L') \rightarrow U_{k'} \rightarrow U'$. Ceci vaut pour tout $c \in \mathbf{E}$. L'application $\text{Gal}(\bar{L}'/L') \rightarrow H$ est donc surjective d'après un argument de la théorie des groupes finis, cf. [9], Lemme 1.1. La fibre de $U' \rightarrow U$ en θ est exactement la fibre de $U' \rightarrow U_{k'}$ en $\theta' = \phi^{-1}(\theta)$, elle est alors connexe, ainsi $\theta \in \text{Hil}$. \square

Remarque 2.5. La méthode de la preuve présentée ici ne fonctionne que pour \mathbb{P}^1 . Si l'on part d'une courbe en bas C de genre quelconque, on va obtenir θ un zéro-cycle global séparable de C qui n'est pas nécessairement un point fermé. On écrit $\theta = \sum_j \theta_j$ où $\theta_j \simeq \text{Spec}(L_j)$ sont des points fermés districts de C . On va trouver que H est engendré par les images de $\text{Gal}(\bar{L}_j/L_j) \rightarrow H$. Ceci ne suffit pas pour déduire que la fibre de $Z' \rightarrow C$ en chaque θ_j est connexe.

3. CAS PARTICULIER OÙ (ABÉLIENNE-SCINDÉE) EST VÉRIFIÉE ET $B = \mathbb{P}^1$

Dans cette section, on montre un cas particulier du théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) où $B = \mathbb{P}^1$ et on fait l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE).

Dans ce cas, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Br_{vert}(X)$ suffit, les conclusions qu'on va montrer deviennent respectivement : pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule au principe de Hasse ;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation faible ;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation forte.

Ce cas est une généralisation du théorème 4.1 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [7] au sens que Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé au lieu d'un ouvert dense de \mathbb{P}^1 . La preuve suit la méthode utilisée dans [7], l'outil principal est l'astuce de Salberger, à laquelle l'argument de §2 est adapté. Afin de baisser la difficulté de la lecture, au lieu de montrer ce cas directement, on le divise en deux étapes : §2 et §3, la preuve ci-dessous ne répète pas l'argument pour la partie précédente §2.

Du même argument que §2, on se ramène à la proposition suivante, qui joue le rôle de la proposition 2.1. Dans le reste de cette section, on montre la proposition.

Proposition 3.1. *Soit $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration qui satisfait l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE) pour tout point θ de \mathbb{P}^1 de codimension 1, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.*

Soient Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de \mathbb{P}^1 et D un ensemble fini de points fermés de \mathbb{P}^1 . Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de zéro-cycles de X de degré 1 orthogonale au groupe $Br_{vert}(X)$.

Alors, pour tout entier strictement positif a et pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, il existe les données suivantes :

(a) *pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $z_v^2 \in Z_0(X_v)$ tel que $z_v - z_v^2$ soit a -divisible dans $Z_0(X_v)$; et pour tout tel z_v^2 , un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de D , et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2 ;*

(b) *un point fermé $\theta \in Hil$ de degré $d \equiv 1 \pmod{a}$ tel que θ soit déployé localement partout, tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, a fortiori θ et $\pi_*(z_v)$ sont rationnellement équivalents modulo a , i.e. ils ont la même image dans $CH_0(\mathbb{P}_v^1)/a$ pour toute $v \in \Omega_k$.*

Démonstration. On considère la fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Soit U un ouvert dense de \mathbb{P}^1 tel que toute fibre X_θ au-dessus d'un point $\theta \in U$ est lisse et géométriquement intègre. On note D_0 l'ensemble des points au-dessus desquels les fibres sont non lisses ou géométriquement non intègres, on écrit $D_0 = \{P_1, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ où P_i est un point fermé de \mathbb{P}^1 de corps résiduel $k_i = k(P_i)$. On choisit un k -point de $\mathbb{P}^1 \setminus D_0$ noté par ∞ tel que la fibre X_∞ soit lisse et géométriquement intègre, alors $D_0 \subset \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty$, quitte à restreindre U , on peut supposer que $U \subset \mathbb{A}^1$. Chaque point fermé P_i donne un point k_i -rationnel $e_i \in k_i = \mathbb{A}^1(k_i)$, on note $g'_i = t - e_i \in k_i(t) = k_i(\mathbb{P}^1)$ et $g_i = N_{k_i(\mathbb{P}^1)/k(\mathbb{P}^1)}(g'_i) \in k(t) = k(\mathbb{P}^1)$. Le point P_i est localement défini par g_i .

Soient \mathcal{P}^1 , \mathcal{X} , et \mathcal{U} des modèles entiers lisses sur $Spec(O_{k,S})$ de \mathbb{P}^1 , X , et U , pour un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ suffisamment grand tel qu'il existe un $O_{k,S}$ -morphisme projectif $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}^1$ dont la fibre générique au-dessus de $Spec(k)$ est

π . De plus, on peut supposer que $g_i \in O_{k,S}[\mathbb{A}^1]$. On note, pour tout $1 \leq i \leq n$, T_i l'adhérence de Zariski de P_i dans \mathcal{P}^1 , c'est aussi l'adhérence de Zariski dans \mathcal{P}^1 du sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{O_{k,S}}^1$ défini par $g_i = 0$. Quitte à augmenter S , on peut supposer que les points schématiques de \mathcal{P}^1 , au-dessus desquels les fibres de Π sont géométriquement non intègres, sont tous contenus dans $T = \bigcup T_i$, que $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et que T_i est étale sur $\text{Spec}(O_{k,S})$.

Comme la fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifie l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE), on fixe une composante irréductible Z_i de multiplicité un de la fibre X_{P_i} . La fermeture algébrique K_i de k_i dans le corps des fonctions de Z_i est une extension abélienne de k_i . On peut écrire K_i/k_i comme un composé d'un nombre fini d'extensions cycliques $K_{i,j}/k_i$.

Comme dans la preuve de la proposition 2.1, lorsqu'on a la fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ et le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil, on choisit un revêtement étale fini galoisien $U' \rightarrow U \subset \mathbb{P}^1$ et un modèle entier $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ au-dessus de O_{k,S_1} qui se factorise à travers \mathcal{V} un modèle entier de $U_{k'}$, où k' est une extension finie de k qui ne dépend que de Hil. Comme il y a des fibres géométriquement non intègres, on ne peut pas appliquer directement l'estimation de Lang-Weil, l'ensemble S_2 dans la preuve de la proposition 2.1 n'existe plus.

Quitte à augmenter S , on peut supposer que $S \supset S_1 \cup \Omega^\infty$. On va redéfinir l'ensemble $I \subset \Omega_k$ qui joue un rôle crucial dans la preuve de la proposition 2.1.

On fixe un caractère primitif χ du groupe cyclique $\text{Gal}(K_{i,j}(\mathbb{P}^1)/k_i(\mathbb{P}^1)) = \text{Gal}(K_{i,j}/k_i)$, l'élément (χ, g'_i) du groupe de Brauer $\text{Br}(k_i(\mathbb{P}^1))$ est noté simplement par $(K_{i,j}/k_i, g'_i)$, on note $A_{i,j} = \text{cores}_{k_i(\mathbb{P}^1)/k(\mathbb{P}^1)}(K_{i,j}/k_i, g'_i) \in \text{Br}(k(\mathbb{P}^1))$, pour la construction de ces éléments cf. [8] §1.1.

Alors $A_{i,j} \in \text{Br}(\mathbb{P}^1 \setminus D)$ pour tout i, j , où D est un certain ensemble fini de points fermés de \mathbb{P}^1 contenant D_0 . Quitte à remplacer a par un multiple, on peut supposer que a annule tous les $A_{i,j}$ et que a est un multiple de $[k' : k]$.

On choisit un zéro-cycle effectif global $z_0 \in Z_0(X)$ de degré $d_0 > 0$ tel que $y_0 = \pi_*(z_0)$ soit à support hors de $D \cup \{\infty\}$.

On part d'une famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k} \perp \text{Br}_{\text{vert}}(X)$, on peut supposer que les z_v sont supportés hors des fibres au-dessus de D d'après le lemme 3.1 de [17]. Le lemme formel de Harari (cf. 2.6.1 de [12] ; pour la version pour les zéro-cycles, cf. [7], Lemme 4.5) dit, en modifiant z_v pour $v \in S' \setminus S$ si nécessaire, qu'il existe un sous-ensemble fini $S' \subset \Omega_k$ contenant S tel que

$$\sum_{v \in S'} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = 0.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que $S' = S$ et on approxime les zéro-cycles locaux pour $v \in S' = S$.

On utilise le procédé de la preuve de la proposition 2.1, pour chaque $v \in S$ on trouve des zéro-cycles effectifs $z_v^2, \tau_v \in Z_0(X_v)$ de degré assez grand $d \equiv 1 \pmod{ad_0}$ tel que $z_v^2 - z_v$ soit a -divisible dans $Z_0(X_v)$, tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$, et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2 .

On rappelle le lemme suivant.

Lemme 3.2 ([7], Lemme 1.2). *Soit k un corps de nombres, on note $\text{Spec}(O)$ un ouvert non-vide de $\text{Spec}(O_k)$. Soit $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}^1$ un morphisme plat, projectif avec \mathcal{X} régulier et lisse sur O . On note $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ la restriction à la fibre générique de Π . Soit $T \subset \mathcal{P}^1$ un sous-schéma fermé fini étale sur O tel que les fibres de Π au-dessus*

des points qui ne sont pas dans T sont géométriquement intègres. Soit $T = \bigcup T_i$ la décomposition des composantes irréductibles, soit k_i le corps des fonctions de T_i .

Quitte à restreindre l'ouvert $\text{Spec}(O) \subset \text{Spec}(O_k)$, on a les assertions suivantes.

(a) Étant donné un point fermé u de \mathcal{P}^1 , si la fibre \mathcal{X}_u sur le corps fini $k(u)$ est géométriquement intègre, alors elle contient un $k(u)$ -point lisse.

(b) Étant donné un point fermé θ de \mathbb{P}^1 avec son adhérence de Zariski $\text{Spec}(\tilde{O}) \simeq \tilde{\theta} \subset \mathcal{P}^1$, où \tilde{O}/O est fini avec $\text{Frac}(\tilde{O}) = k(\theta)$, on note \tilde{O}' la clôture intégrale de \tilde{O} dans $k(\theta)$. Si $u \in \tilde{\theta} \subset \mathcal{P}^1$ est un point fermé tel que $\mathcal{X}_u/k(u)$ soit géométriquement intègre, alors X_{θ} contient un $k(\theta)_v$ -point lisse où v est une place de $k(\theta)$ (associée à un point fermé de $\text{Spec}(\tilde{O}')$) au-dessus de u .

(c) Soit u dans un des T_i , il définit alors une place v_i de k_i . Supposons qu'il existe une composante irréductible Z de la fibre de f en $T_i \times_O k = \text{Spec}(k_i)$ de multiplicité un. On note K_i la clôture algébrique de k_i dans le corps des fonctions de Z . Si la place v_i décompose totalement dans l'anneau des entiers $O_i \subset K_i$, alors $\mathcal{X}_u/k(u)$ est géométriquement intègre.

(d) On suppose que, pour chaque i , il existe au moins une composante irréductible de $f^{-1}(\text{Spec}(k_i))$ de multiplicité un. Alors, étant donné M/k une extension finie, il existe une extension finie M' de M , telle que pour presque toute place $v \in \Omega_k$ décomposant totalement dans M' on ait l'assertion suivante :

L'application $f : X(L) \longrightarrow \mathbb{P}^1(L)$ est surjective pour toute extension finie L de k_v .

Démonstration. Voir le lemme 1.2 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [7] pour la démonstration, c'est une version pour les points fermés, comme indiqué dans la page 20 de [7] la même preuve fonctionne dans ce cas.

En comparant avec [7, Lemme 1.2], ici on remplace « scindée » (i.e. la fibre contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre) par « géométriquement intègre » simultanément dans l'hypothèse et dans les conclusions, la même preuve reste valable. \square

On fixe une extension (non-triviale) finie galoisienne M de k qui contient tous les k_i et $K_{i,j}$, d'après le lemme 3.2 (d), il existe une extension finie $M' \supset M \cdot k'$ de k et I un sous-ensemble infini de Ω_k en dehors de S contenant presque toutes les places qui sont décomposées totalement dans M' . On a alors, pour toute extension finie L/k_v ($v \in I$), l'application $X(L) \longrightarrow \mathbb{P}^1(L)$ est surjective, les places dans I sont décomposées totalement dans M et dans k' .

On fixe l'application (Lemme 2.4)

$$\gamma : \mathbf{E} \longrightarrow ((\Omega_k \setminus S) \cap I) \otimes_k k'$$

comme dans la preuve de la proposition 2.1 et on fixe une place $v_0 \in I \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$ (pas simplement dans $\Omega_k \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$). On a ensuite les $f_v \in k_v(\mathbb{P}^1)^*/k_v^*$ pour toute $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$ décrites comme suit.

Pour chaque $c \in \mathbf{E}$, on trouve, comme dans la preuve de la proposition 2.1, un zéro-cycle $x_c + x'_c$ séparable effectif de degré d à support hors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$. De même, pour v_0 , on trouve un point fermé x_{v_0} de degré d en dehors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$. On écrit $\text{div}_{\mathbb{P}^1_v}(f_v) = \pi_*(\tau_v) - d\infty$ pour $v \in S$, $\text{div}_{\mathbb{P}^1_{v_c}}(f_{v_c}) = (x_c + x'_c) - d\infty$ pour $c \in \mathbf{E}$, et $\text{div}_{\mathbb{P}^1_{v_0}}(f_{v_0}) = x_{v_0} - d\infty$ pour $v = v_0$.

Pour toute $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$, on pose $\rho_{i,v} = f_v(P_i) \in k_{i,v}^* = (k_i \otimes_k k_v)^*$. Puisque $I \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \setminus \{v_0\}$ est infini, le théorème de Dirichlet généralisé ([22],

Corollaire 4.4) permet de trouver, pour chaque i , un élément $\rho_i \in k_i^*$ qui soit suffisamment proche de $\rho_{i,v} \in (k_i \otimes_k k_v)^*$ pour $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$ et qui soit une unité en dehors de $(S \cup I) \otimes_k k_i \sqcup \{w_i\}$, où w_i est une place finie de k_i en dehors de $(S \cup I) \otimes_k k_i$ telle que de plus $w_i(\rho_i) = 1$.

Comme d peut être choisi assez grand, d'après le théorème de Riemann-Roch (pour les détails *cf.* les preuves des lemmes 5.1 et 5.2 de Colliot-Thélène [2]), on obtient une fonction $f \in O_{k,S \cup I}[\mathbb{A}^1]$ telle que f soit suffisamment proche de f_v pour toute $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$, et telle que $f(P_i) = \rho_i$ pour tout i . En écrivant $\text{div}_{\mathbb{P}^1}(f) = \theta - d\infty$, on obtient un zéro-cycle effectif θ , de plus θ est un point fermé dans U hors de $D \cup \text{supp}(y_0) \cup \{\infty\}$ car il est suffisamment proche de x_{v_0} . Puisque le zéro-cycle θ est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$, le point fermé $\theta \in \text{Hil}$ d'après le même argument de la proposition 2.1 (ici on utilise le fait que d et $[k' : k]$ sont premiers entre eux). Le zéro-cycle θ est aussi suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour $v \in S$,

Il reste à vérifier que θ est déployé localement partout. On suit principalement l'idée de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [7].

Pour $w \in \Omega_{k(\theta)}$ au-dessus de $v \in \Omega_k$:

Si $v \in S$, le théorème des fonctions implicites implique que θ_v est déployé.

Si $v \in I$, le lemme 3.2 (d) implique que $X(k(\theta)_w) \rightarrow \mathbb{P}^1(k(\theta)_w)$ pour toute w au-dessus de v .

Si $v \notin S \cup I$, on note $\tilde{\theta} \simeq \text{Spec}(A)$ l'adhérence de Zariski de θ dans \mathcal{P}^1 , où $A/O_{k,S}$ est fini avec $\text{Frac}(A) = k(\theta)$, on sait alors que $O_{k(\theta),S}$ est la clôture intégrale de A dans $k(\theta)$. On fixe une place w de $k(\theta)$ au-dessus de v , il définit un point fermé $w \in \text{Spec}(O_{k(\theta),S})$, ce point se trouve au-dessus d'un certain point fermé $w_\theta \in \tilde{\theta}$. On remarque que $\tilde{\theta}$ et T_i sont définis localement par f et g_i respectivement. Il y a deux cas possibles.

(i) Si w_θ est contenue dans un (et alors un seul) des T_i . On sait que $g_i(\theta) \in k(\theta)$ et $\rho_i = f(P_i) \in O_{k_i,S \cup I}$. On rappelle que pour $w' \in \Omega_{k_i} \setminus (S \cup I) \otimes_k k_i$, $w'(\rho_i) = 1$ si $w' = w_i$, $w'(\rho_i) = 0$ si $w' \neq w_i$. Donc, en restreignant au-dessus de $\Omega_k \setminus (S \cup I) \subset \text{Spec}(O_{k,S})$, l'intersection $T_i \cap \tilde{\theta}$ ne contient qu'un point noté par $w_i \in T_i$, et le multiplicité d'intersection de T_i et $\tilde{\theta}$ en w_i égale 1 car $w_i(\rho_i) = 1$. Alors w_i , vu comme un point fermé w_θ de $\tilde{\theta}$, doit être un point régulier de $\tilde{\theta}$. On a alors $w = w_\theta = w_i$, $k_{iw_i} = k(\theta)_w$ et $w(g_i(\theta)) = w_i(\rho_i) = 1$.

(ii) Si $w_\theta \notin T_i$ pour tout i , alors $\mathcal{X}_{w_\theta}/k(w_\theta)$ est géométriquement intègre par la construction de T_i , on a donc $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ d'après le lemme 3.2(b). On sait que $g_i(\theta)$ est une unité (modulo w_θ) dans $k(w_\theta) \subset k(w)$ car $g_i(\theta) \notin T_i \cap \tilde{\theta}$, donc $w(g_i(\theta)) = 0$.

Pour vérifier que θ est déployé localement partout, il reste la place w dans le cas (i) où $w = w_i \in T_i$. On note $E_i = k_i \otimes_k k(\theta)$, $F_{i,j} = K_{i,j} \otimes_k k(\theta)$. On a $\langle A_{i,j}, \theta \rangle_{\mathbb{P}^1} = \text{cores}_{k(\theta)/k} \text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta)) \in \text{Br}(k)$ par définition.

On rappelle que

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = 0$$

et $\langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v^2) \rangle_v$ pour toute $v \in S$. Alors

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(\tau_v) \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle \pi^*(A_{i,j}), \tau_v \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle \pi^*(A_{i,j}), z_v^2 \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v^2) \rangle_v = 0,$$

donc

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \theta \rangle_v = 0$$

par continuité de l'accouplement de Brauer-Manin (pour $v \in S$, θ est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$, τ_v est suffisamment proche de z_v^2 , on remarque que $z_v - z_v^2$ est a -divisible, et a annule $A_{i,j}$).

On a donc

$$\sum_{v \in \Omega_k \setminus S} \langle A_{i,j}, \theta \rangle_v = 0$$

car θ est global. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \Omega_k \setminus S} \text{inv}_v(\text{cores}_{k(\theta)/k} \text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta))) &= 0, \\ \sum_{w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)} \text{inv}_w(\text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta))) &= 0. \end{aligned}$$

À partir de maintenant on suppose que $w \in (\Omega_k \setminus S) \otimes_k k(\theta)$.

Si $w \in I \otimes_k k(\theta)$, soit v la place de k au-dessous de w , par construction l'extension des corps locaux associés aux $K_{i,j}/k_i$ au-dessus de v est triviale, l'extension $F_{i,j}/E_i$ est alors triviale au-dessus de w , on trouve

$$\text{inv}_w(\text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta))) = 0.$$

Si $w \notin I \otimes_k k(\theta)$ et $w \neq w_i$ (plus précisément, le point w_θ associé à w n'est pas dans T_i), on rappelle que dans ce cas $w(g_i(\theta)) = 0$, alors $g_i(\theta)$ est une unité en w , d'où $\text{inv}_w(\text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta))) = 0$.

On trouve finalement

$$(\star) \text{inv}_{w_i}(\text{cores}_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta))) = 0.$$

On considère la flèche $E_i \longrightarrow E_i \otimes_{k(\theta)} k(\theta)_{w_i}$, où $E_i \otimes_{k(\theta)} k(\theta)_{w_i}$ est un produit d'extensions de $k(\theta)_{w_i}$. En remarquant que $w(N_{E_i/k(\theta)}(g'_i(\theta))) = w(g_i(\theta))$ égale soit 0 si $w \neq w_i$ soit 1 si $w = w_i$, il y a donc seulement une de ces extensions, notée par $E_{i,w}$, dans laquelle l'image de $g'_i(\theta)$ n'est pas une unité mais une uniformisante, de plus, $E_{i,w}/k(\theta)_{w_i}$ est triviale. L'égalité (\star) implique que $(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta)) \otimes_{E_i} E_{i,w} = 0$, on a alors pour tout j l'extension cyclique $K_{i,j}/k_i$ est triviale après $\otimes_{E_i} E_{i,w}$ car $g'_i(\theta)$ est une uniformisante de $E_{i,w}$, on trouve que K_i/k_i est triviale après $\otimes_{E_i} E_{i,w}$. D'après le lemme 3.2(c), la réduction $\mathcal{X}_{w_i}/k(w_i)$ de X_θ modulo w_i est géométriquement intègre, X_θ contient donc un $k(\theta)_{w_i}$ -point d'après le lemme 3.2(b). \square

4. CAS GÉNÉRAL

4.1. Fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque. Dans cette sous-section, on considère le théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) pour le cas où $B = C$ est une courbe lisse de groupe $\text{III}(\text{Jac}(C))$ fini. Dans ce cas, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Br_{\text{vert}}(X)$ suffit, *i.e.* les conclusions deviennent respectivement : pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{\text{vert}}(X)$ est la seule au principe de Hasse;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{\text{vert}}(X)$ est la seule à l'approximation faible;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation forte.

Ce cas est une généralisation des théorèmes principaux 1.3 et 1.4 de Wittenberg [27] au sens que Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé au lieu d'un ouvert dense de C .

Dans la section §5.1, on va expliquer comment établir la suite (E) pour X , d'où la conclusion (3) est automatiquement vérifiée (cf. §5), de plus la même méthode démontre également (1) et (2).

4.2. Fibrations au-dessus de \mathbb{P}^n . Dans cette sous-section, on explique comment on peut montrer le théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) dans le cas où $B = \mathbb{P}^n$ est l'espace projectif. En répétant la stratégie de Wittenberg [28, Théorème 3.4], le résultat a été presque établi dans [16, Théorème 3.5], la seule différence est de remplacer l'ouvert dense $U \subset \mathbb{P}^n$ par un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^n$. Il suffit de vérifier que la condition liée à le sous-ensemble hilbertien généralisé se comporte bien dans la récurrence, qui est le lemme suivant. Ce lemme a été mentionné dans [13] §1.2 sans preuve, on présente une preuve pour le confort du lecteur.

Lemme 4.1. *Soient k un corps de nombres et $Hil \subset \mathbb{A}^{r+s}$ un sous-ensemble hilbertien généralisé. Alors $p_1(Hil)$ contient un certain sous-ensemble hilbertien généralisé de \mathbb{A}^r , où $p_1 : \mathbb{A}^{r+s} = \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^s \rightarrow \mathbb{A}^r$ est la projection canonique.*

Démonstration. On note $p_2 : \mathbb{A}^{r+s} = \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^s \rightarrow \mathbb{A}^s$ la deuxième projection. Soit Hil défini par $V \xrightarrow{\rho} U \subset \mathbb{A}^{r+s}$ où U est un ouvert non vide et où ρ est un morphisme étale fini. La projection $W_2 = p_2(U)$ est un ouvert non vide de \mathbb{A}^s , il existe un ouvert non vide $W'_2 \subset W_2$ tel que pour tout point fermé $\theta_2 \in W'_2$, $U_{\theta_2} = U \cap p_2^{-1}(\theta_2)$ soit lisse sur $k(\theta_2)$, la variété V_{θ_2} est alors lisse. Comme $\mathbb{A}^{r+s}(k) \cap Hil$ est Zariski dense dans \mathbb{A}^{r+s} , cf. [9], on trouve que $p_2(\mathbb{A}^{r+s}(k) \cap Hil) \cap W'_2 \neq \emptyset$, il existe alors un k -point $\theta_2 \in p_2(Hil) \cap W'_2$. L'ouvert U_{θ_2} de $p_2^{-1}(\theta_2)$ est alors non vide lisse, on définit $Z = \rho^{-1}(U_{\theta_2})$, c'est une variété lisse. Par construction, il existe un point fermé $\theta_1 \in \mathbb{A}^r$ tel que (θ_1, θ_2) soit contenu dans Hil, i.e. $\rho^{-1}(\theta_1, \theta_2)$ est connexe, la variété Z est alors aussi connexe, donc intègre. Puisque θ_2 est un k -point, le morphisme $Z \rightarrow U_{\theta_2}$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{A}^r \times \theta_2 \simeq \mathbb{A}^r$, contenu dans $p_1(Hil)$. \square

5. LA SUITE EXACTE (E)

Dans cette section, on explique la suite (E) et établit son exactitude pour les fibrations considérées dans le théorème principal.

Tout d'abord, on note $A_0(X) = \ker[deg : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}]$. La théorie du corps de classes global implique que l'image diagonale de $A_0(X)$ dans $\prod_{v \in \Omega_k} A_0(X_v)$ est contenue dans le noyau de l'accouplement de Brauer-Manin. Ceci donne un complexe

$$A_0(X) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} A_0(X_v) \rightarrow Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où la deuxième flèche est induite par l'accouplement de Brauer-Manin. On considère le complexe complété

$$(E_0) \quad A_0^\wedge(X) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} A_0^\wedge(X_v) \rightarrow Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où \widehat{M} désigne $\varprojlim_{n>0} M/n$ pour un groupe abélien M .

L'exactitude de la suite (E_0) a été conjecturée par Colliot-Thélène/Sansuc [5], Conjectures A, C, pour les surfaces rationnelles; par Kato/Saito [14, §7], et par Colliot-Thélène [1, Conjecture 1.5], pour toutes les variétés lisses.

La formulation suivante est due à van Hamel [24], développée par Wittenberg [27]. On définit $CH_{0,\mathbb{A}}(X)$ comme le groupe

$$\prod_{v \in \Omega_k^f} CH_0(X_v) \times \prod_{v \in \Omega_k^\infty} \text{Coker}[N_{\bar{k}_v/k_v} : CH_0(\bar{X}_v) \rightarrow CH_0(X_v)].$$

De même, on trouve un complexe

$$(E) \quad CH_0(X) \rightarrow CH_{0,\mathbb{A}}(X) \rightarrow \text{Hom}(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

et on espère que (E) soit exact pour toute variété lisse et géométriquement connexe X . Il est remarqué par Wittenberg que l'exactitude de (E) implique l'exactitude de (E_0) , et implique que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X , cf. [27], Remarques 1.1 (ii)(iii). L'exactitude de (E) implique aussi que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible et forte pour les zéro-cycles de degré 1, cf. [15, Proposition 2.2.1] et sa preuve. Réciproquement, c'est possible mais ce n'est pas évident que l'approximation forte pour les zéro-cycle de degré 1 implique l'exactitude de (E) qui concerne les zéro-cycles de tout degré.

On remarque que, pour les places réelles, le conoyau $\text{Coker}[N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : CH_0(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow CH_0(X_{\mathbb{R}})]$ est calculé par Colliot-Thélène/Ischebeck [4].

Dans le reste de cette section, on va établir l'exactitude de la suite (E) pour les fibrations considérées dans le théorème principal, on suppose que X_η est rationnellement connexe à partir de maintenant. Dans §5.1, pour le cas où $B = C$ est une courbe, on peut l'établir directement en utilisant l'argument de Wittenberg [27], de plus la suite (E) reste exacte même si l'on remplace $Br(X)$ par $Br_{vert}(X)$. Dans §5.2, pour le cas où $B = \mathbb{P}^n$, l'argument utilise la conclusion (2) dans le théorème principal qui est montrée dans §4.2.

5.1. Le cas $B = C$. Dans son article [27], Wittenberg établit l'exactitude de la suite (E) pour une fibration $X \rightarrow C$ satisfaisant (ABÉLIENNE-SCINDÉE), en supposant que

- pour presque tout point fermé θ de C , pour tout entier $n > 0$ et tout ensemble fini $S \subset \Omega_{k(\theta)}$, l'image de $CH_0(X_\theta)$ dans $\prod_{w \in S} CH_0((X_\theta)_w)/n$ contient l'image de $\prod_{w \in S} X_\theta(k(\theta)_w)$ dans ce même groupe. Cette hypothèse est vérifiée si X_θ satisfait l'approximation faible pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1.

On rappelle l'idée de la preuve dans [27]. On part d'une fibration $X \rightarrow C$, on construit un morphisme dominant $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ et on considère la fibration $W' \rightarrow \mathbb{P}^1$, où W' est une compactification lisse de la restriction à la Weil $W \rightarrow \mathbb{P}^1$ de $X \rightarrow C$ le long de ψ . L'exactitude de (E) pour X se déduit de l'exactitude de (E) pour W' , cette réduction a été fait dans §4.3 de [27]. Afin d'établir (E) pour W' , on applique le théorème 4.8 de [27] (une variante de [7, théorème 4.1]) à la fibration $W' \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Dans [27], l'hypothèse arithmétique est posée sur X_θ pour presque tout point fermé θ de C . Par contre, ici l'hypothèse arithmétique est posée seulement pour $\theta \in \text{Hil}$ où Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé de C . Pour que le même

argument fonctionne pour notre situation, il suffit d'adapter la notion de sous-ensemble hilbertien généralisé avec cette procédure de réduction et avec [27, Théorème 4.8].

D'abord, on suppose que Hil est défini par $Z \rightarrow U \subset C$, son composé avec ψ définit alors un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil_1 de \mathbb{P}^1 tel que pour tout $\theta_1 \in \text{Hil}_1$ on ait automatiquement $\theta = \psi^{-1}(\theta_1) \in \text{Hil}$. Donc les sous-ensembles hilbertiens généralisés se comporte bien avec la réduction dans §4.3 de [27].

Ensuite, on considère le théorème 4.8 de [27], avec l'hypothèse arithmétique supposée seulement sur un sous-ensemble hilbertien généralisé $\text{Hil}_1 \subset \mathbb{P}^1$. Remarquons que l'assertion dans §3 généralise [7, théorème 4.1] et de plus l'argument fonctionne également pour $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de degré premier à un nombre entier bien choisi, ceci confirme la conclusion de [27, Théorème 4.8] sous l'hypothèse sur Hil_1 .

Enfin, on remarque que, dans tout cet argument, on utilise seulement le sous-groupe $Br_{\text{vert}}(X)$ de $Br(X)$.

5.2. Le cas $B = \mathbb{P}^n$. Puisque le cas $n = 1$ est contenu dans §5.1, on suppose que $n > 1$. Comme expliqué dans [16, Théorème 3.5], on applique la stratégie de Wittenberg dans la preuve du [28, Théorème 3.4] qu'on rappelle comme suit. On part d'une fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^n$, la variété X est vue comme une fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ à fibres géométriquement intègres. De plus, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur les fibres X_θ si θ est contenu dans un certain sous-ensemble hilbertien généralisé de \mathbb{P}^{n-1} . En appliquant le théorème 3.5 de [16], on conclut que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1. En plus, sans modifier ni les hypothèses ni les arguments, la même conclusion est valable pour les zéro-cycles de degré δ quelconque sur X .

D'après Wittenberg [27, Prop 3.1], afin d'établir (E) pour une fibration au-dessus d'une courbe, il suffit de vérifier une propriété (P_S) pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$. On remarque que la même conclusion reste valable si l'on remplace la base par l'espace projectif. Tous les arguments de Wittenberg fonctionnent. En plus, la propriété (P_S) et les arguments deviennent plus simples car l'application induite $CH_0(X) \rightarrow CH_0(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ est simplement l'application de degré.

Il reste à vérifier la propriété pour $X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$:

(P_S) Soit $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ une famille de zéro-cycles de degré δ . Si elle est orthogonale à $Br(X)$, alors pour tout entier $n > 0$, il existe un zéro-cycle z de X de degré δ , tel que pour toute $v \in S$ on ait $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$ si v est finie et $z = z_v + N_{\bar{k}_v/k_v}(u_v)$ dans $CH_0(X_v)$ pour un $u_v \in CH_0(\bar{X}_v)$ si v est réelle.

Cette propriété est impliquée par la propriété suivante.

(P'_S) Soit $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ une famille de zéro-cycles de degré δ . Si elle est orthogonale à $Br(X)$, alors pour tout entier $n > 0$, il existe un zéro-cycle z de X de degré δ , tel que pour toute $v \in S$ on ait $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/2n$.

Cette dernière propriété est exactement l'assertion que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré δ , qui est vérifiée par X . Ceci établit l'exactitude de (E) pour le cas $B = \mathbb{P}^n$ dans le théorème principal.

6. FIBRÉ EN SURFACES DE CHÂTELET

La notion de sous-ensemble hilbertien généralisé nous permet d'appliquer le résultat principal à certaines fibrations, par exemple, les fibrations en surfaces de Châtelet (ou encore plus général) au-dessus d'une courbe sous l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE).

D'abord, on rappelle la notion de p -fold de Châtelet. Soient K un corps et L une extension finie de degré n . On fixe une K -base linéaire w_1, \dots, w_n de L . Soit $P(z) \in K[z]$ un polynôme de degré dn où $d > 0$ est un entier. L'équation normique

$$N_{L/K}(x_1 w_1 + \dots + x_n w_n) = P(z)$$

est un polynôme dans $K[x_1, \dots, x_n, z]$, elle définit une variété lisse et géométriquement intègre dans \mathbb{A}^{n+1} . Il existe un modèle projectif lisse $X = X_{L/K, P(z)}$ de cette variété ([25], Proposition 2.1). Un tel modèle est appelé un p -fold de Châtelet si L/K est une extension cyclique de degré premier p et si $d = 2$, c'est une surface de Châtelet si $p = 2$. Si K est un corps de nombres, la variété X vue comme un fibré en coniques au-dessus de \mathbb{P}^1 via l'indéterminée z , vérifie que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (Théorème principal, ou [27, Théorème 1.3]).

Fait. Si K est un corps de nombres, le groupe de Brauer $Br(X)$ est égal à $im[Br(K) \rightarrow Br(X)]$ lorsque $P(z)$ est un polynôme irréductible sur K . Par conséquent, le principe de Hasse et l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sont valables pour $X = X_{L/K, P(z)}$.

Ce fait se déduit de la proposition 2.5 de Colliot-Thélène/Harari/Skorobogatov [3], voir aussi le corollaire 3.3 de Várilly-Alvarado/Viray [25]. Récemment, Wei obtient un résultat plus général, une fois que L/K est une extension cyclique (pas nécessairement de degré premier) et $P(z)$ est irréductible sur K (de degré quelconque), on a encore le fait ci-dessus, cf. [26], Théorème 1.4.

Soit k un corps de nombres. On considère une fibration au-dessus d'une courbe $\pi : X \rightarrow C$, dont la fibre générique est définie par l'équation $N_{L/K}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p) = P(z)$, où $P(z) \in K[z]$ est un polynôme supposé irréductible sur $K = k(C)$ et où L est une extension cyclique de K . Le polynôme $P(z)$ définit une extension finie K' de K , à laquelle il associe une courbe normale Z et un morphisme fini dominant $Z \rightarrow C$. Ce morphisme est étale au-dessus d'un ouvert non vide, il définit alors un sous-ensemble hilbertien généralisé $\text{Hil} \subset C$ tel que pour tout $\theta \in \text{Hil}$ la fibre X_θ vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (le fait ci-dessus). D'après le théorème principal, si $\text{III}(Jac(C))$ est fini et si π vérifie (ABÉLIENNE-SCINDÉE), l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur X , la suite (E) est exacte pour X (avec la finitude de $\text{III}(Jac(C))$ supposée).

Il reste à vérifier (ABÉLIENNE-SCINDÉE). Dans le cas particulier où le terme gauche

$$N_{L/k(C)}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p)$$

ne varie pas le long de C , on peut vérifier directement l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE). Plus précisément, dans ce cas $L = l(C)$ où l/k est une extension cyclique de degré p , et w_1, \dots, w_p est une k -base linéaire de l (donc c'est une K -base linéaire de L car C est une courbe géométriquement intègre sur k). Soit θ un point fermé de C , la fibre X_θ , définie par $N_{l \otimes_k k(\theta)/k(\theta)}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p) = P_\theta(z)$,

- est géométriquement intègre, *a fortiori* satisfait (ABÉLIENNE-SCINDÉE), si $P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est un polynôme non nul;
- satisfait (ABÉLIENNE-SCINDÉE), si $P_\theta(z)$ est un polynôme nul. En fait, la fibre X_θ a p composantes irréductibles (toute de multiplicité un) après l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$, dont chacune est géométriquement intègre sur $l(\theta)$.

En résumé, on trouve :

Proposition 6.1. *Soient k un corps de nombres et l une extension cyclique. Soit K une extension finie de $k(t)$. Supposons que $\text{III}(\text{Jac}(C))$ est fini, où C est la courbe projective lisse et géométriquement intègre de corps des fonctions K . Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre, et k -rationnellement équivalente à la k -variété définie par l'équation (en variables (x_1, \dots, x_p, z))*

$$N_{l(C)/k(C)}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p) = P(z),$$

où $P(z) \in K[z]$ est un polynôme irréductible sur K .

Alors, la suite (E) est exacte pour X .

Remarque 6.2. Si l'extension $L/k(C)$ ne provient pas simplement d'une extension finie l/k , *a priori*, on ne sait pas si, pour tout modèle $X \rightarrow C$ de $X_\eta/k(C)$, les fibres satisfont l'hypothèse¹ (ABÉLIENNE-SCINDÉE). Généralement, on part d'un p -fold de Châtelet $Y/k(C)$ défini par $N_{L/k(C)}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p) = P(z)$, et on veut trouver un modèle $X \rightarrow C$ à fibre générique X_η isomorphe à Y sur $k(C)$, tel que les fibres fermées satisfont (ABÉLIENNE-SCINDÉE). Comme $\bar{k}(C)$ est un C_1 -corps d'après le théorème de Tsen, la variété Y admet toujours un $\bar{k}(C)$ -point car elle est définie par un polynôme homogène, l'homogénéisation de $N_{L/k(C)}(x_1 w_1 + \dots + x_p w_p) = P(z)$, de degré p en $p + 1$ variables x_0, x_1, \dots, x_p . D'où on obtient une \bar{k} -section de $\pi_{\bar{k}}$ pour n'importe quel modèle $\pi : X \rightarrow C$ de $Y/k(C)$, alors toute fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un. Mais on ne sait pas si $Y/k(C)$ admet un modèle $X \rightarrow C$ vérifiant la condition d'abélianité de (ABÉLIENNE-SCINDÉE).

Remerciements. Je tiens à remercier D. Harari pour ses nombreuses discussions très utiles pendant la préparation de ce travail, et pour son aide pour le français. Je remercie O. Wittenberg de sa patiente explication de son travail récent [27] et de ses commentaires sur la première version de ce texte. Je remercie également J.-L. Colliot-Thélène pour ses suggestions.

RÉFÉRENCES

- [1] J.-L. Colliot-Thélène. L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles. *J. Théorie de nombres de Bordeaux*, 7 :51–73, 1995.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène. Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées (avec un appendice par E. Frossard et V. Suresh). *J. Amer. Math. Soc.*, 13 :101–124, 2000.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, and A.-N. Skorobogatov. Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme. In M. Reid and A.-N. Skorobogatov, editors, *Number theory and algebraic geometry*, volume 303 of *London Math. Society Lecture Notes Series*, pages 69–89–73. Cambridge University Press, 2003.

1. Par contre, toutes les fibres du solide de Poonen [20] sont géométriquement intègres, dans ce cas-là, le théorème principal de [17] suffit à conclure. Les solides de Poonen sont aussi dans le cadre de la proposition 6.1.

- [4] J.-L. Colliot-Thélène and F. Ischebeck. L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292 :723–725, 1981.
- [5] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc. On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S.Bloch. *Duke Math. J.*, 48 :421–447, 1981.
- [6] J.-L. Colliot-Thélène and A.-N. Skorobogatov. Descent on fibrations over \mathbb{P}_k^1 revisited. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 128(3) :383–393, 2000.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, A.-N. Skorobogatov, and Sir Peter Swinnerton-Dyer. Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device. *J. reine angew. Math.*, 495 :1–28, 1998.
- [8] J.-L. Colliot-Thélène and Sir Peter Swinnerton-Dyer. Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties. *J. reine angew. Math.*, 453 :49–112, 1994.
- [9] T. Ekedahl. An effective version of Hilbert's irreducibility theorem. In C. Goldstein, editor, *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989*, volume 91 of *Progress in Math.*, pages 241–248. Birkhäuser, 1990.
- [10] E. Frossard. Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer. *J. reine angew. Math.*, 557 :81–101, 2003.
- [11] A. Grothendieck. *EGA IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*. I.H.E.S. Publ. Math., 1964.
- [12] D. Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *J. Duke Math.*, 75 :221–260, 1994.
- [13] D. Harari. Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif. *Compositio Math.*, 143 :603–617, 2007.
- [14] K. Kato and S. Saito. Global class field theory of arithmetic schemes. *Contemporary Math.*, 55 :255–331, 1986.
- [15] Y. Liang. Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields. Preprint (submitted), available at arXiv :1107.1634.
- [16] Y. Liang. Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus de l'espace projectif. Prépublication, arXiv :1011.5995.
- [17] Y. Liang. Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus d'une courbe : I. À paraître dans *Mathematische Annalen*, disponible sur arXiv :1006.2572.
- [18] Yu.I. Manin. Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In *Actes du Congrès Intern. Math. (Nice 1970)*, volume 1, pages 401–411. Gauthiers-Villars, 1971.
- [19] B. Margaux. Passage to the limit in non-abelian Čech cohomology. *J. Lie Theory*, 17 :591–596, 2007.
- [20] B. Poonen. Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers. *Annals of Math.*, 171(3) :2157–2169, 2010.
- [21] P. Salberger. Zero-cycles on rational surfaces over number fields. *Invent. math.*, 91 :505–524, 1988.
- [22] J.-J. Sansuc. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. In M.-J. Bertin, editor, *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1980-1981*, volume 22 of *Progress in Math.*, pages 253–271. Birkhäuser, 1982.
- [23] T. Szamuely. *Galois groups and fundamental groups*, volume 117 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2009.

- [24] J. van Hamel. The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves. *J. London Math. Soc.*, 68 :317–337, 2003.
- [25] A. Várilly-Alvarado and B. Viray. Higher dimensional analogues of Châtelet surfaces. Prépublication, arXiv :1101.5453.
- [26] D. Wei. On the equation $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$. Travail en progrès.
- [27] O. Wittenberg. Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d’une courbe de genre quelconque. Prépublication, arXiv :1010.1883.
- [28] O. Wittenberg. *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1*, volume 1901 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2007.

YONGQI LIANG
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
BÂTIMENT 425,
UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11,
F-91405 ORSAY,
FRANCE
E-mail address: yongqi.liang@math.u-psud.fr